数理解析研究所講究録
533巻 1984年 118-140

流体のEuler方程式の解の超局所特異性の伝播

東大・理　山崎昌男(Masao Yamazaki)

非圧縮性完全流体の運動を記述するEuler方程式は以下で与えられる。

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial u_j}{\partial t} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(u_k u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} = f_j & \text{in } (0,T)\times\Omega \\ & \text{for } j=1,2,\cdots,n \\ (2) \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 & \text{in } (0,T)\times\Omega \end{cases}$$

ここに、Ω は $\mathbb{R}^n = \{x=(x_1,\cdots,x_n);\ x_j\in\mathbb{R}\}$ の開部分集合、T は正実数、外力 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ は $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$ の既知函数、速度 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 及び圧力 p は未知函数で、すべて実数値とする。ここでは与えられた解 u, p を $t\in[0,T]$ をパラメータとする超函数とみなした時の局所及び超局所特異性がそれぞれ流線及び陪特性帯に沿って伝播する事を示す。

1. 記号及び仮定

σ を正実数、k を σ より小さい最大の整数、j を $0\leqq j\leqq k$

なる整数．I を $[0, T]$ の閉部分区間．Ω' を Ω の部分集合とする。$I \times \Omega'$ 上の函数 $u(t, x)$ は．以下の２条件が成立つような定数 $C > 0$ が存在する時．函数空間 $C^{j,\sigma}(I \times \Omega')$ に属すると言う．

1） $h \leqq j$, $h + |\alpha| \leqq k$ を満たす任意の自然数 h 及び多重指数 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し，

$$\begin{cases} \partial_t^h \partial_x^\alpha u(t, x) \text{ は } I \times \Omega' \text{ 上連続.} \\ |\partial_t^h \partial_x^\alpha u(t, x)| \leqq C \quad \text{on} \quad I \times \Omega' \end{cases}$$

2） $h \leqq j$, $h + |\alpha| = k$ を満たす任意の $h \in \mathbb{N}$ 及び $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し．$t \in I$ かつ $x, y \in \Omega'$, $x \neq y$ ならば

$$|\partial_t^h \partial_x^\alpha u(t, x) - \partial_t^h \partial_x^\alpha u(t, y)| \leqq C |x - y|^{\sigma - k}$$

この時．上の条件を満たす C の下限を $\|u\|_{C^{j,\sigma}}$ とおくと，$C^{j,\sigma}(I \times \Omega')$ は $\|u\|_{C^{j,\sigma}}$ をノルムとしてBanach空間となる。

以下では．方程式系 (1)，(2) の解 u, p で．条件

$$(3) \begin{cases} u \in \mathbb{C}^{0,\sigma}([0, T] \times \Omega), \quad \sigma > 1 \\ p \in B([0, T]; \mathcal{D}'(\Omega)) \end{cases}$$

を満たすものが与えられているとする。（ここに．$\mathbb{C}^{0,\sigma}$ は $C^{0,\sigma}$ の n 個の直積を表わし．$f(t, x) \in B([0, T]; \mathcal{D}'(\Omega))$ は．各 $t \in [0, T]$ について $f(t, \cdot) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ であり．かつ $\{f(t, \cdot) ; 0 \leq t \leq T\}$ が $\mathcal{D}'(\Omega)$ で有界であるという意味である。以下も同様の記号を用いる。）

注意1　上の条件を満たす解の存在は，適当な初期条件及び境界条件の下で，多くの人々によって証明されている。例えば，Kato [5] は次の結果を示した。

$n=2$，$1<\sigma<\rho<2$ で，Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持った $\mathbb{R}^2$ の有界領域であるとし，$\partial\Omega$ の法線ベクトルを n と書く。$u_0(x)$，$f(t,x)$ はそれぞれ $\mathbb{C}^{\rho}(\Omega)$，$\mathbb{C}^{0,\rho}([0,T]\times\Omega)$（$T$ は任意の正実数）に属する函数で，$u_0(x)$ は両立条件　$u_0(x)\cdot n = 0$　on $\partial\Omega$　を満たすものとする。

この時，条件 (3) 及び

$$\text{(4)}\left\{\begin{array}{lll} \text{初期条件} & u(0,x)=u_0(x) & \text{in } \Omega \\ \text{境界条件} & u(t,x)\cdot n = 0 & \text{on } [0,T]\times\partial\Omega \end{array}\right.$$

を満たす方程式系 (1)，(2) の解 u，p が存在する。さらにこの解は，p に t のみの函数を加える不定性を除いて一意的である。

$n\geq 3$ の場合は，Ebin-Marsden [3]，Kato [6]，Swann [9]，Bourguignon-Brezis [2]，Temam [10] 等で扱われている。ここでは，条件 (3) を満たす時間について局所的な解（十分小さい $T>0$ に対し，$[0,T]\times\Omega$ で方程式を満たす解）の存在が示されている。

2. 流線と陪特性帯

$(\mathring{t}, \mathring{x}) \in [0, T] \times \Omega$ に対して、$[0, T]$の開部分区間 I で定義され、$\Omega \subset \mathbb{R}^n$に値を取る函数 $\overline{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x}) = (\overline{x}_j(t; \mathring{t}, \mathring{x}))_{j=1,\cdots,n}$ を、Cauchy 問題

$$(5)\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}_j}{dt}(t; \mathring{t}, \mathring{x}) = u_j(t, \overline{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x})) & (j = 1, \cdots, n) \\ \overline{x}(\mathring{t}; \mathring{t}, \mathring{x}) = \mathring{x} \end{cases}$$

の解とすると、曲線 $\{(t, \overline{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x})) : t \in I\}$ は $(\mathring{t}, \mathring{x})$ を通る、ベクトル場 $H = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ の積分曲線である。このような曲線を流線という。

次に、$(\mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi}) \in [0, T] \times (T^*\Omega \setminus 0)$，すなわち $t \in [0, T]$，$\mathring{x} \in \Omega$，$\mathring{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して、I で定義され $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に値を取る函数 $\overline{\xi}(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi}) = (\overline{\xi}_j(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi}))_{j=1,\cdots,n}$ を、

$$(6)\begin{cases} \dfrac{d\overline{\xi}_j}{dt}(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi}) = -\sum_{k=1}^{n} \overline{\xi}_k(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi}) \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}(t, \overline{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x})) \\ \overline{\xi}(\mathring{t}; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi}) = \mathring{\xi} \end{cases}$$

の解とすると、曲線 $\{(t, \overline{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x}), \overline{\xi}(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi})) : t \in I\}$ は $(\mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi})$ を通る、ベクトル場

$\tilde{H} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j,k=1}^{n} \xi_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j} \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ の積分曲線である。

ここでは、このような曲線を陪特性帯という。

<u>注意2</u> 流線は、一般の方程式の陪特性曲線に対応する概念である。一方、ここで定義した陪特性帯は、通常の陪特性帯の表示式の τ 一変数を除いたものである。ここでは

時間tをパラメータと見なし，Ω上の超函数$u(t,\cdot)$の特異性を論ずるので，上の定義を用いた。

$t, \mathring{t} \in [0, T]$とすると流線により$\Omega$の開集合間の写像

$$x \longmapsto \overline{x}(t;\mathring{t}, x)$$

が定まるが，写像

$$(x, \xi) \longmapsto (\overline{x}(t;\mathring{t}, x), \overline{\xi}(t;\mathring{t}, x, \xi))$$

は，上の写像から自然に導かれる$T^*\Omega \setminus 0$の開部分集合間の写像である。

<u>注意3</u>　仮定より$u(t, x)$はxについてLipschitz連続だから，Cauchy問題(5)は少なくとも$t = \mathring{t}$の近傍で解け，かつ解は一意的である。

$I = (T_1, T_2)$　$(0 \leqq T_1 < T_2 \leqq T)$では解があるが，$t = T_2$までは接続できないとすると，

$$\lim_{t \uparrow T_2} d(\overline{x}(t;\mathring{t}, \mathring{x}), \partial\Omega) = 0$$ となっている。

従って，境界条件(4)の下では$I = [0, T]$全体で解がある。

<u>注意4</u>　kをσ未満の最大の整数とし，$\overline{x}(t;\mathring{t}, \mathring{x})$が$\mathring{t} \in I$，$\mathring{x} \in \Omega'$に対して定義されているならば，

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{x}(t;\mathring{t}, \mathring{x}) \text{ は } (\mathring{t}, \mathring{x}) \text{ について } C^{k,\sigma}(I \times \Omega') \text{ に属する} \\ \overline{\xi}(t;\mathring{t}, \mathring{x}, \xi) \text{ は } \xi \text{ について線型} \\ \text{その係数行列は } (\mathring{t}, \mathring{x}) \text{ について } C^{k-1,\sigma-1}(I \times \Omega') \text{ に属する} \end{array}\right.$$

等のことが、常微分方程式の解の初期値に関する微分可能性からわかる。

3. 函数空間とその(超)局所化

ここでは函数空間として一般Sobolev空間 W_r^s を用いる。$1<r<\infty$, $s\in\mathbb{R}$ に対し、$\mathbb{R}^n$ 上の緩増加超函数 $u(x)$ で条件

$$\|u\|_{W_r^s}=\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)](x)\|_{L^r}<\infty$$

なるもの全体の集合を W_r^s と書き、その n 個の直積を W_r^s と書く。

次に、C が $[0,T]\times\Omega$ に含まれる流線である時、$u(t,x)\in B([0,T];\mathcal{D}'(\Omega))$ が C に沿って W_r^s に属するとは、$\overline{C}=\{(t,x)\in C;\ T_1\leq t\leq T_2\}\subset\subset[0,T]\times\Omega$ となるような任意の $T_1, T_2\in[0,T]$ に対し、$\overline{C}$ の近傍で恒等的に 1 に等しいような $\varphi(t,x)\in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$ が存在して

$$\varphi(t,x)u(t,x)\in B([0,T];W_r^s)$$

が成立つことである。

また、Γ が $[0,T]\times(T^*\Omega\setminus 0)$ に含まれる陪特性帯で、C がその $[0,T]\times\Omega$ への射影である時、$u(t,x)\in B([0,T];\mathcal{D}'(\Omega))$ が Γ に沿って W_r^s に属するとは、以下の条件を満たすような $\varphi(t,x)\in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$ 及び $\psi(t,x,\xi)\in C^\infty([0,T];S^0)$ (ここに S^0 は0階の

擬微分作用素の表象の集合）が存在することである：

- $\varphi(t, x)$ ：$\overline{C}$ の近傍で恒等的に 1 に等しい，
- $\psi(t, x, \xi)$ ：$\overline{\Gamma} = \{(t, x, \xi) \in \Gamma ;\ T_1 \leq t \leq T_2\}$ の錐近傍（ξ についての錐）で恒等的に 1 に等しい，
- $\{(t, x) ;\ {}^{\exists}\xi,\ \psi(t, x, \xi) \neq 0\}$ は $[0, T] \times \Omega$ のコンパクト部分集合に含まれる，
- $\psi(t, x, D_x)(\varphi u)(t, x) \in B([0, T] ; W_r^s)$.

ベクトル値函数 $u(t, x) = (u_j(t, x))_{j=1,\cdots,n}$ は，その各成分 $u_j(t, x)$ が C に沿って［resp. Γ に沿って］W_r^s に属する時，C に沿って［resp. Γ に沿って］W_r^s に属すると言われる。

4．主定理

$(\mathring{t}, \mathring{x}) \in [0, T] \times \Omega$, $\mathring{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とし，C を $(\mathring{t}, \mathring{x})$ を通る流線，Γ を $(\mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi})$ を通る陪特性帯とする。

この時，次の定理が成立つ。

<u>定理1</u>　（局所特異性の伝播）

$f(t, x)$ が C に沿って W_r^{μ} に属し，$u(\mathring{t}, x)$ が $x = \mathring{x}$ の近傍で局所的に W_r^{μ} に属するならば，u, p, $\frac{\partial u}{\partial t}$ はそれぞれ C に沿って W_r^{μ}, $W_r^{\mu+1}$, $W_r^{\mu-1}$ に属する。

定理2　（超局所特異性の伝播）

$\sigma > 2$，$\chi \leq \mu \leq \chi + \sigma - 2$とする。

$u(t,x)$がCに沿ってW_r^{χ}に属し，$f(t,x)$がΓに沿ってW_r^{μ}に属し，$u(\mathring{t},x)$が$(\mathring{x},\mathring{\xi})$で超局所的に$W_r^{\mu}$に属するならば，$u$，$p$，$\frac{\partial u}{\partial t}$はそれぞれ$\Gamma$に沿って$W_r^{\mu}$，$W_r^{\mu+1}$，$W_r^{\mu-1}$に属する。

注意5　定理1の主内容は，$x \in \Omega$についての超函数$u(t,x)$の特異性は流線に沿って流れるということ，言いかえれば，$u(t_1,\cdot)$の特異性と$u(t_2,\cdot)$の特異性は，流線で記述されるΩ（の開集合）上の変換で互いに移り合うということである。上のことを，やゝ強い条件の下で超局所化したものが定理2である。

注意6　ここでは函数空間として一般Sobolev空間W_r^s $(1 < r < \infty)$を用いたが，この代りにBesov空間B_{rq}^s $(1 \leqq r, q \leqq \infty)$又はTriebel–Lizorkin空間$F_{rq}^s$ $(1 < r, q < \infty)$を用いても同じ結果が得られる。これらの空間の定義はTriebel [11]にある。特に，$r = q = \infty$の時は$B_{\infty\infty}^s = C^s$（$s \notin \mathbb{Z}$の時はHölder空間，$s \in \mathbb{Z}$の時はZygmund空間）となる。$r = q = \infty$，$s \notin \mathbb{Z}$の時の定理1はGiga [4]によって得られた。

注意7　通常の特異性の伝播の理論では，定理2に対応する

結果はあるが、定理1に対応する結果はない。今の場合に定理1が成立するのは、方程式系(1)、(2)が本質的には単独1階の双曲型方程式であり、　従って $[0,T]\times\Omega$ 上のある点の fiber を出発する陪特性帯は、すべて同一の陪特性曲線上にあるという事実に基く。

また、物理的に考えても、Euler 方程式は(波動方程式等と異り)媒質そのものの運動を記述していることから、定理1の様な結果があっても不思議ではない。

5、証明の idea

以下では、微分形式の記号を用いることにして $f=\sum_{j=1}^{n} f_j dx_j$, $u=\sum_{j=1}^{n} u_j dx_j$ と書く。また x についての外微分を d, その形式的共役微分作用素を d^* で表わし、任意の階数の微分形式に対して $\Delta = d^*d + dd^*$ と定義する。(通常のラプラシアンと符号のみが異なる)　この時、方程式系(1), (2)は次の様に書き直せる。

$$\begin{cases} (1)' \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(u_j u) + dp = f & \text{in } (0,T)\times\Omega \\ (2)' \quad d^*u = 0 & \text{in } (0,T)\times\Omega \end{cases}$$

証明は、Serrin [8] で Navier-Stokes 方程式の解の滑らかさを証明するために用いられた "vorticity"(渦度)の方法の idea と、Bony [1] - Meyer [7] で非線型方程式の超局所解析

に用いられた"para-differential operator"の方法とを組合わせて行う。

vorticity の方法とは次の様なものである。(1)$'$の式を外微分して $\omega = du$ (これを渦度と呼ぶ)とおくと、p が消去されて

(7) $$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + B(\nabla u, \nabla u) = df$$

が得られる。ここに、$B(\nabla u, \nabla u)$ は u_j たちの1階微分の斉次2次式を係数とする2-形式である。

(7)から ω の滑らかさが得られれば、条件(2)より導かれる関係式 $\Delta u = d^* du = d^* \omega$ から u の滑らかさが得られ、次いで(1)$'$に d^* を作用させて得られる式

$$-\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \Delta p = d^* f$$

から p の滑らかさが得られる。

次に、para-differential operator とは次の様なものである。$\rho > 0$、$\ell \in \mathbb{R}$ とする。$(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ の函数 $P(x, \xi)$ が、任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対して、評価式

$$\| \partial_\xi^\alpha P(x, \xi) \|_{C^\rho} \leq C_{|\alpha|} \langle \xi \rangle^{\ell - |\alpha|}$$

($\| \ \|_{C^\rho}$ は x についての C^ρ-ノルム、$C_{|\alpha|}$ は $|\alpha|$ のみによって定まる定数、$\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$)

を満足する時、表象族 $S(C^\rho)^\ell$ に属するという。$S(C^\rho)^\ell$ には自然な位相が入り、局所凸空間になる。

次に，条件

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \Psi(\xi) \subset \{\xi : |\xi| < 4/3\} \\ \{\xi : |\xi| \leqq 1\} \text{ のある近傍で } \Psi(\xi) \equiv 1 \end{cases}$$

を満たす $\Psi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を任意に1つ固定し，

$$\chi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(2^{-k}\xi) \cdot \{\Psi(2^{-k-2}\eta) - \Psi(2^{-k-1}\eta)\}$$

とおき，$w(x) \in W_r^{-\infty}$ に対して

$$\pi_1(P(x, D_x), w)(x)$$
$$= \mathfrak{F}^{-1}\left[\int \hat{P}(\xi-\eta, \eta)\chi(\xi-\eta, \eta)\hat{w}(\eta)d\eta\right](x)$$

と定義して，写像 $w \longmapsto \pi_1(P(x, D_x), w)$ を，$P(x, \xi)$ を表象とする para-differential operator と言う。ここに $\hat{P}(\xi, \eta) = \int e^{-ix\xi} P(x, \eta)dx$ で，積分はすべて $\mathbb{R}^n$ 上で行なう。

para-differential operator が非線型方程式の regularity の理論に有効なのは，$P(x, \xi)$ が x についてあまり滑らかではなくても，対応する para-differential operator は高い微分可能性を持つ函数の空間でも有界だからである。より詳しく述べると次の補題になる。

<u>補題1</u>

任意の $s, \ell \in \mathbb{R}$，$\rho > 0$，$1 < r < \infty$ に対し，双線型写像

$$\begin{array}{ccc} (P(x, \xi), w(x)) & \longmapsto & \pi_1(P(x, D_x), w)(x) \\ \cap & & \cap \\ S(C^\rho)^\ell \times W_r^s & \longrightarrow & W_r^{s-\ell} \end{array}$$

は連続である。

次に、para-differential operator の間の演算規則として、次の補題がある。

補題2

$l_1, l_2, s \in \mathbb{R}, \rho > 0, 1 < r < \infty$ とする。$0 \leqq j \leqq \rho$ なる各自然数 j に対して、$P(x,\xi) \in S(C^\rho)^{l_1}$, $Q(x,\xi) \in S(C^\rho)^{l_2}$ に

$$R_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha P(x,\xi) \cdot \partial_x^\alpha Q(x,\xi) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

を対応させる写像は、$S(C^\rho)^{l_1} \times S(C^\rho)^{l_2}$ から $S(C^{\rho-j})^{l_1+l_2-j}$ への連続双線型写像であり、さらに $w(x) \in W_r^s$ とすると、$P(x,\xi)$, $Q(x,\xi)$, w に

$$\pi_1(P(x,D_x), \pi_1(Q(x,D_x), w)) - \sum_{j=0}^{[\rho]} \pi_1(R_j(x,D_x), w)$$

を対応させる写像は $S(C^\rho)^{l_1} \times S(C^\rho)^{l_2} \times W_r^s$ から $W_r^{s+\rho-l_1-l_2}$ への連続3重線型写像である。

補題2を用いて、表象の非特性方向における作用素の microlocal parametrix（滑らかさが ρ だけ高い項を法とするもの）が、擬微分作用素と同様にして構成できる。

最後に、非線型項の線型化及び擬微分作用素との関係について、それぞれ次の補題がある。より一般的な結果、及び他の函数空間との関係などについては、Bony [1], Meyer [7], Yamazaki [12], [13], [14] を参照されたい。

補題3

$\rho > 0$, $\rho + s > 0$, $1 < r < \infty$, $v \in C^{\rho}$, $w \in W_r^s$とする。この時、$s > 0$ならば$vw - \pi_1(v, w) - \pi_1(w, v)$が、$s \leqq 0$ならば$vw - \pi_1(v, w)$が、それぞれ$W_r^{s+\rho}$に属する。

補題4

$P(x, \xi)$がxについて滑らかなl階の表象ならば、$P(x, D_x)w - \pi_1(P(x, D_x), w)$は、任意の$w \in W_r^{-\infty}$に対して、$W_r^{\infty}$に属する。（$W_r^{-\infty} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} W_r^s$, $W_r^{\infty} = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} W_r^s$）

6. 基本補題への帰着

まず、uが（超）局所的にW_r^{μ}に含まれるということは、$[0, T] \times \Omega$（$[0, T] \times (T^*\Omega \setminus 0)$）のコンパクト部分集合である各$\overline{C}$（各$\overline{\Gamma}$）について確かめればよいから、初めから$C$（$\Gamma$）は$0 \leqq t \leqq T$全体で定義されているとしてよい。

次に、$0 \leqq t \leqq \mathring{t}$なる部分と$\mathring{t} \leqq t \leqq T$なる部分に分けて考え、前者では$v(t, x) = -u(\mathring{t} - t, x)$とおくと

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(v_j v) + dp(\mathring{t} - t, x) = f(\mathring{t} - t, x)$$

が成り立つことに注意すれば、$\mathring{t} = 0$としてよい。

さらに、次の補題を示せばよい。

补題5

$\varphi(t,x) \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$, $\psi_1(t,x,\xi) \in C^\infty([0,T];S^0)$

で、条件

- $\varphi(t,x)$：Cの近傍で$\equiv 1$
- $\psi_1(t,x,\xi)$：Γの錐近傍で$\equiv 1$
- $\{(t,x); {}^\exists\xi,\ \psi_1(t,x,\xi) \neq 0\}$は$[0,T]\times\Omega$のコンパクト部分集合
- $\varphi(t,x)u(t,x) \in B([0,T];W_r^\kappa)$ ---------------(8)
- $\psi_1(t,x,D_x)(\varphi u)(t,x) \in B([0,T];W_r^\lambda)$ ——————(9)
- $\psi_1(t,x,D_x)(\varphi f)(t,x) \in B([0,T];W_r^\mu)$ - ——-(10)
- $\psi_1(0,x,D_x)(\varphi u)(0,x) \in W_r^\mu$
- $\kappa \leq \lambda < \mu \leq \min\{\kappa+\rho-1,\ \lambda+\frac{1}{2}\}$（ここに$\rho$は、$\psi_1$が$\xi$に無関係ならば$\sigma$、そうでなければ$\sigma-1$とする。）

を満足しているとする。この時、以下の条件を満足する$\psi_2(t,x,\xi) \in C^\infty([0,T];S^0)$が存在する。

- $\psi_2(t,x,\xi)$：Γの錐近傍で$\equiv 1$
- $\mathrm{supp}\,\psi_2(t,x,\xi)$の錐近傍で$\psi_1(t,x,\xi) \equiv 1$
- $\psi_2(t,x,\xi) \neq 0 \implies \varphi(t,x) = 1$
- $\psi_2(t,x,D_x)(\varphi u)(t,x) \in B([0,T];W_r^\mu)$

さらに、ψ_1がξに無関係ならば、ψ_2もξに無関係に取れる。

実際、コンパクトな台を持つ函数が C^σ に属するならば、σ より小さい任意の τ について W_r^τ に属するから、定理1の仮定が成立つならば、$\psi_1(t,x)\in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$ を適当に取れば、$\kappa=\lambda=\tau$ として、(8), (9), (10) が成立っている。

よって、$\theta=\min\{\mu,\ \tau+\sigma-1,\ \tau+1/2\}$ とおくと

$$\psi_2(t,x)\varphi(t,x)u(t,x)\in B([0,T];W_r^\theta)$$

となる ψ_2 が取れることが補題5からわかる。

$\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\ \sigma-1\right\}$ とおいた時、$\mu<\sigma+\delta$ ならば $\theta=\mu$ となるように $\tau<\sigma$ が取れるから u についての結論が言える。$\mu\geqq\sigma+\delta$ すなわち $\theta=\tau+\delta$ ならば、$\varphi\psi_2$ を改めて φ と置けば、$\kappa=\lambda=\tau+\delta$ として (8), (9), (10) が成立つ。

再び補題5を用いると、

$$\nu=\min\{\mu,\ \kappa+\sigma-1,\ \lambda+1/2\}=\min\{\mu,\ \tau+2\delta\} \text{ に対して}$$

$$\psi_3(t,x)\cdot\varphi(t,x)u(t,x)\in B([0,T];W_r^\nu)$$

となる ψ_3 が取れ、$\mu<\sigma+2\delta$ ならばこれから結論が言える。$\mu<\sigma+N\delta$ なる自然数 N に対し、上の議論を N 回繰返せば、定理1の $u(t,x)$ についての結論が示せる。

定理2の $u(t,x)$ についての結論も、上と同様に補題5を繰返して用いることによって示せる。

定理2の $p(t,x)$ についての結論は次の手順で示せる。

$(\varphi u)(t,x)\in B([0,T];W_r^\kappa)$, $\psi(t,x,D_x)(\varphi u)(t,x)$,

$\psi(t,x,D_x)(\varphi f)(t,x) \in B([0,T];W_r^{\mu})$ となるような φ, ψを取り, $\varphi u = v$, $\varphi p = q$ とおく。

(1)′の両辺に φ を掛けて d^* を作用させれば

$$d^* d q - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(v_j v_k) = d^*(\varphi f) + g \quad \text{が得られる。}$$

ここに, $K = \{(t,x) : \varphi(t,x) \neq 0,\ 1\}^{-} \subset\subset [0,T]\times\Omega \setminus C$ とおくと, $\mathrm{supp}\, g \subset K$ である。

次に, $\chi(t,x) \in C_0^\infty([0,T]\times\Omega)$ 及び $\psi_1(t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \psi_1(t,x,\xi) \neq 0 \Rightarrow \varphi(t,x) = \psi(t,x,\xi) = 1 \\ C\text{の錐近傍で } \psi_1(t,x,\xi) \equiv 1 \\ K\text{の近傍で } \chi(t,x) \equiv 1 \\ \mathrm{supp}\,\chi \cap \{(t,x) : \exists\xi\ \psi_1(t,x,\xi) \neq 0\}^{-} = \phi \end{cases}$$

となるように取れば, 擬微分作用素の演算規則より

$$\psi_1(t,x,D_x)\, g(t,x) = \psi_1(t,x,D_x)\cdot\chi(t,x)\cdot g(t,x)$$
$$\in B([0,T];W_r^{\infty}) \quad \text{である。}$$

次に, 補題3より

$$v_j v_k = \pi_1(v_j, v_k) + \pi_1(v_k, v_j) \quad \mathrm{mod}\ B([0,T];W_r^{\chi+\sigma})$$

補題4より

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\pi_1(v_j,v_k) - \pi_1(-D_j D_k, \pi_1(v_j,v_k)) \in B([0,T];W_r^{\infty})$$
$$\psi(t,x,D_x)\cdot - \pi_1(\psi(t,x,D_x),\cdot) \in B([0,T];W_r^{\infty})$$

補題2より

$$\pi_1(-D_jD_k, \pi_1(v_j, v_k)) = \pi_1\left(v_j, \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} v_k\right) + \pi_1\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\ \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)$$
$$+\pi_1\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) + \pi_1\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_k}, v_k\right)$$

が成立ち．最後の式の右辺を j, $k=1,\cdots,n$ について総和すると，$\mathrm{supp}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial x_j\partial x_k}\subset K$ などの事実から，

$$\sum_{j,k}\psi_1(t,x,D_x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\pi_1(v_j,v_k)\right)$$
$$=\sum_{j,k}\sum_{h=0}^{[\sigma]-1}\sum_{|\alpha|=h}\frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!}\pi_1\left(\partial_x^\alpha\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(t,x)\cdot\partial_\xi^\alpha\psi_1(t,x,D_x),\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)+g'$$
$$(g'\in B([0,T], W_r^{\chi+\sigma-2}))$$

が成立つ。この右辺に．$\psi(t,x,D_x)$ による割り算定理を用いると．

$$\pi_1\left(\partial_x^\alpha\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\cdot\partial_\xi^\alpha\psi_1(t,x,D_x),\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)$$
$$\in B([0,T];W_r^{\mu-1+|\alpha|})\subset B([0,T];W_r^{\mu-1})$$

がわかる。$\mu-1\leq\chi+\sigma-2$ だから．結果として

$$\psi_1(t,x,D_x)\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(v_jv_k)\in B([0,T];W_r^{\mu-1})$$

が成立つ。同様にして

$$\psi_1(t,x,D_x)\,d^*(\chi f)\in B([0,T];W_r^{\mu-1})$$

がわかるから．結局

$$\psi_1(t,x,D_x)\,\Delta q\subset B([0,T];W_r^{\mu-1})$$

が成立し、これより $p(t,x)$ についての定理 2 の結論が示せる。定理 1 の p についての結論も同様に示せる。また．$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ についての結論は．u, p についての結論から容易に従う。

7. 基本補題の証明

以下では、例えば函数 f に対して

$$\pi_1(d, f) = \sum_{j=1}^{n} \pi_1(iD_j, f)\,dx_j$$

と記すように、微分形式の間の写像を π_1 のカッコ内に入れて表わす。

$v = \varphi u$ とおき、(1)′ の両辺に φ を掛けて d^*d を作用させると、

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial t}(d^*dv) + \sum_{j=1}^{n} d^*d\,\frac{\partial}{\partial x_j}(v_j v) = d^*d(\chi f) + f'$$

が得られる。ここで f' は K 内に台を持つ。

次に、$0 \leqq \gamma \leqq 1$ に対して

$$P_\gamma(\xi) = \frac{\langle \xi \rangle^{\mu-2}}{1 + \gamma \langle \xi \rangle^{\mu-\lambda}}$$ とおき、

$\psi(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T]; S^0)$ を

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\psi(t, x, \xi) \text{ の錐近傍で } \psi_1(t, x, \xi) \equiv 1 \\ \{(t, x) : {}^\exists\xi;\ \psi(t, x, \xi) \neq 0\} \text{ の近傍で } \varphi(t, x) \equiv 1 \end{cases}$$

を満たすように取る。

さらに、$\{(\tilde{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x}), \tilde{\xi}(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi})) : 0 \leqq t \leqq T\}$ が

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$$ の積分曲線となるように

函数 $\tilde{x}(t; \mathring{t}, \mathring{x})$, $\tilde{\xi}(t; \mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\xi})$ を取り、（第2節参照）

$q(x, \xi) \in S^0$ （0階の擬微分作用素）であって

$(\mathring{x}, \mathring{\xi})$ の錐近傍で $q(x, \xi) \equiv 1$ なるものを取り、

$$Q(t, x, \xi) = q(\tilde{x}(0; t, x), \tilde{\xi}(0; t, x, \xi))$$ とおく。

さらに、$\mathrm{supp}\, q$ を十分小さく取って、$\mathrm{supp}\, Q$ の錐近傍で $\psi(t,x,\xi)\equiv 1$ となるようにしておく。

また、ψ_2 が ξ によらない時は、ψ, Q とも ξ によらないものを取る。

この時、

$$\begin{cases} Q(t,x,\xi)\in B([0,T]; S(C^{\rho})^0) \\ Q(t,x,\xi)\equiv 1 \quad (\Gamma \text{ のある錐近傍で}) \end{cases}$$

が成立つ。

ここで、$w_\gamma=\pi_1(Q(t,x,D_x), \pi_1(P_\gamma(D_x), \pi_1(\psi(t,x,D_x), d^*dv)))$ とおき、(11) の両辺に $\pi_1(Q(t,x,D_x), \pi_1(P_\gamma(D_x), \pi_1(\psi(t,x,D_x))))$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
&\pi_1(Q(t,x,D_x), \pi_1(P_\gamma(D_x), \pi_1(\psi(t,x,D_x), \partial_t d^* d v)))\\
&+\pi_1\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k\, i D_k, w_\gamma\Big)+\\
&+\pi_1\Big(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(t,x)\Big(\frac{1}{P_\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi_j}P_\gamma\Big)(D_x)\cdot D_k, w_\gamma\Big)+\\
&+\frac{1}{i}\pi_1\Big(\Big\{Q, \sum_{k=1}^{n} v_k\xi_k\Big\}(t,x,D_x), \pi_1(P_\gamma(D_x), \pi_1(\psi(t,x,D_x), d^*dv)))\\
&+\sum_{h=1}^{[\sigma]} \pi_1(T_{jkh}(t,x,D_x), \pi_1(Q(t,x,D_x), \pi_1(P_\gamma(D_x),\\
&\qquad \pi_1(\psi(t,x,D_x), v_k)))) dx_j = g_\gamma
\end{aligned}$$

($\{g_\gamma : 0\leqq \gamma\leqq 1\}$: $B([0,T]; L^2)$ で有界)

となることが、計算により確かめられる。

次に、$\dfrac{\partial Q}{\partial t}=-\sum_k \dfrac{\partial Q}{\partial x_k}+\sum_{j,k}\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_j}\dfrac{\partial v_k}{\partial x_j}\xi_j$ であることと、

$\pi_1(Q(t,x,D_x),\ \pi_1(P_\gamma(D_x),\ \pi_1(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x,D_x),\ d^*dv)))$
が $B([0,T];W_r^{\rho+\kappa-2-(\mu-2)})$ で有界であることから、

$$\begin{aligned}(12)\ \partial_t w_\gamma &+ \pi_1\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k i D_k,\ w_\gamma\Big) + \\ &+ \sum_{j,k=1}^{n} \pi_1\Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\cdot\Big(\frac{1}{P_\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi_j}P_\gamma\Big)\cdot D_k,\ w_\gamma\Big) + \\ &+ \sum_{h=1}^{[\sigma]} \pi_1(T_{jkh}(t,x,D_x),\ \pi_1(Q(t,x,D_x),\ \pi_1(P_\gamma(D_x),\\ &\qquad \pi_1(\psi(t,x,D_x),\ v_h))))\,dx_j = g'_\gamma\end{aligned}$$

$(\{g'_\gamma : 0 \leqq \gamma \leqq 1\} : B([0,T];\mathbb{L}^r)$ で有界)
を得る。

ここで、G を $\Delta = d^*d + dd^*$ についての Ω 上の Green 函数を積分核とする積分作用素とし、$\{x : {}^{\exists}t \in [0,T],\ (t,x) \in \mathrm{supp}\,\psi\}$ の近傍で恒等的に 1 に等しい $a(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ を取ると、

$$\begin{aligned}v(t,x) &= a(x)v(t,x) = a(x)\cdot G(d^*dv + dd^*v)\\ &= a(x)G(a(x)(d^*dv + dd^*v))\end{aligned}$$

ここで、G は Ω 上の -2 階の擬微分作用素だから、$a(x)G(a(x)\cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の -2 階の擬微分作用素である。その表象を $H(x,D_x)$ とすると、

$$v(t,x) = H(x,D_x)(d^*dv + dd^*v)$$

これと前に述べた性質より

$$\begin{aligned}&\pi_1(Q(t,x,D_x),\ \pi_1(P_\gamma(D_x),\ \pi_1(\psi(t,x,D_x),\ v)))\\ &= \pi_1(H(x,D_x),\ w_\gamma) + g''_\gamma\end{aligned}$$

$(\{g''_\gamma : 0 \leqq \gamma \leqq 1\} : B([0,T];W_r^2)$ で有界)

これを(12)に代入して、さらに計算を行うと

$$\frac{\partial w_\gamma}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k w_\gamma) + A_\gamma w_\gamma = h_\gamma$$

を得る。ここに、$\{h_\gamma : 0 \leqq \gamma \leqq 1\}$ は $B([0,T]; \mathbb{L}^r)$ で有界、$\{A_\gamma : 0 \leqq \gamma \leqq 1\}$ は $B([0,T]; L(\mathbb{L}^r, \mathbb{L}^r))$ で有界である。また、$0 < \gamma \leqq 1$ の時 $P_\gamma(\xi) \in S^{\lambda-2}$ であることより、w_γ は $B([0,T]; \mathbb{L}^r)$ に属する。最後に、$\{w_\gamma(0,x) : 0 \leqq \gamma \leqq 1\}$ は $\mathbb{L}^r$ で有界である。

以上の結果より、$\{w_\gamma : 0 < \gamma \leqq 1\}$ は $B([0,T]; \mathbb{L}^r)$ で有界であるから、$0 \leqq t \leqq T$ によらない定数 C があり、任意の $t \in [0,T]$ に対し、0 に収束する数列 $\{\gamma_k\}$ と $\|u^{(t)}\|_{\mathbb{L}^r} \leq C$ なる $u^{(t)} \in \mathbb{L}^r$ があり、

$$w_{\gamma_k}(t,\cdot) \longrightarrow u^{(t)} \quad \text{weakly in } \mathbb{L}^r \text{ as } k \to \infty$$

となっている。

一方、$w_\gamma \longrightarrow w_0$ in $B([0,T]; W_r^{\lambda-\mu-1})$ as $\gamma \to 0$ であるから、$u^{(t)} = w_0(t,\cdot)$

$\therefore$ $w_0 \in B([0,T]; \mathbb{L}^r)$

これから、para-differential operator の演算規則と割り算を用いれば、求める結論が導かれる。

REFERENCES

[1] J. M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, 14 (1981), 209-246.

[2] J. P. Bourguignon - H. Brezis, Remarks on the Euler equation, J. Funct. Anal., 15 (1974), 341-363.

[3] D. G. Ebin - J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an imcompressible fluid, Ann. Math., 92 (1970), 102-163.

[4] Y. Giga, Private Communication.

[5] T. Kato, On Classical Solutions of the Two-Dimensional Non-Stationary Euler Equation, Arch. Rational Mech. Anal., 25 (1967), 188-200.

[6] ——— , Nonstationary Flows of Viscous and Ideal Fluids in $\mathbb{R}^3$, J. Funct. Anal., 9 (1972), 296-315.

[7] Y. Meyer, Remarques sur un théorème de J. M. Bony, Supplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo, atti del Seminario di Analisi Armonica Pisa, 8-17 aprile 1980, Serie II, numero 1 (1981), 1-20.

[8] J. Serrin, On the Interior Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equation, Arch. Rational Mech. Anal., 9 (1962), 187-195.

[9] H. S. G. Swann, The Existence and Uniqueness of Nonstationary Ideal Imcompressible Flow in Bounded Domains in $\mathbb{R}^3$, Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973), 167-180.

[10] R. Temam, On the Euler Equations of Imcompressible Perfect Fluids, J. Funct. Anal., 20 (1975), 32-43.

[11] H. Triebel, Theory of Function Spaces, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.

[12] M. Yamazaki, Continuité des opérateurs pseudo-différentiels et para-différentiels dans les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin non-isotropes, C. R. Acad. Sc. Paris, 296 (1983), Série I, 533-536.

[13] ——, Regularité microlocale quasi-homogène des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, to appear in C. R. Acad. Sc. Paris.

[14] ——, 非線型偏微分方程式の解の microlocal regularity について, 数理解析研究所講究録, to appear.

ADDED REFERENCES

[15] S. Alinhac - G. Metivier, Propagation de l'analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler, preprint.

[16] P. Godin, Subelliptic non linear oblique derivative problems, preprint.